

Vecteurs, droites et plans de l'espace

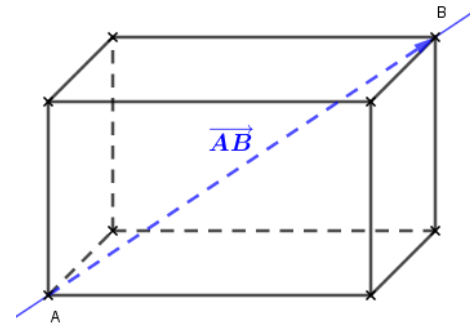
1) Vecteurs de l'espace :

a) Définition, cas d'égalité :

La notion de vecteur définie dans le plan s'étend à l'espace.

Définition : Soit A et B deux points distincts de l'espace, on caractérise le vecteur \overrightarrow{AB} par :

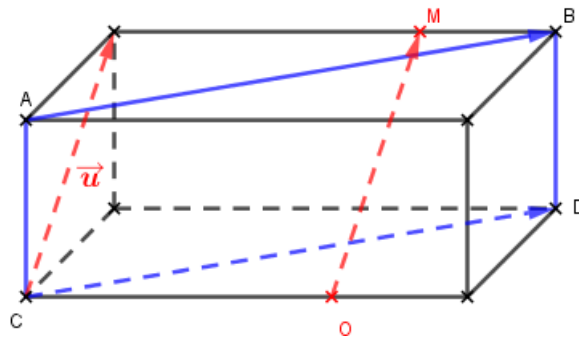
- sa direction : celle de la droite (AB) ;
- son sens : de A vers B ;
- sa norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui est la longueur AB .



Propriétés (admisses) : Soient A , B , C et D quatre points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si D est l'image de C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB}
- Pour tout vecteur \vec{u} et tout point O de l'espace, il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.
On dit que \overrightarrow{OM} est le représentant du vecteur \vec{u} d'origine O et d'extrémité M .

Exemple :



- $ABDC$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$;
- le vecteur \overrightarrow{OM} est le représentant du vecteur \vec{u} d'origine O et d'extrémité M .

Définition (vecteur nul) : on appelle vecteur nul, le vecteur de représentant \overrightarrow{AA} , pour tout point A de l'espace et on le note $\vec{0}$.

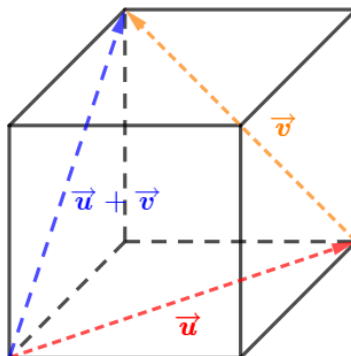
b) Opérations sur les vecteurs :

► Somme de deux vecteurs :

Définition : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

On définit la somme $\vec{u} + \vec{v}$ comme le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur \vec{u} et de la translation de vecteur \vec{v} .

Exemple :

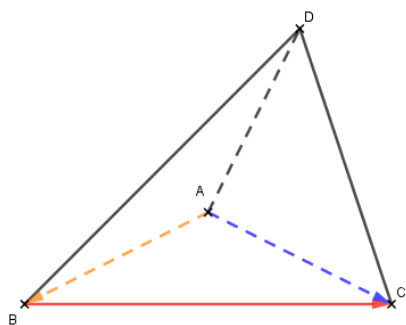


Propriétés (admises) :

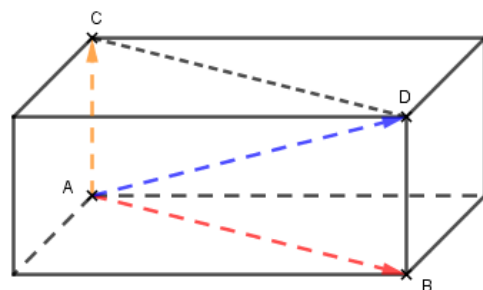
Pour tous points A, B, C et D, on a :

- **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (règle du parallélogramme).

Exemples :



Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



ABDC étant un parallélogramme, on a ici :
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

► Produit d'un vecteur par un réel :

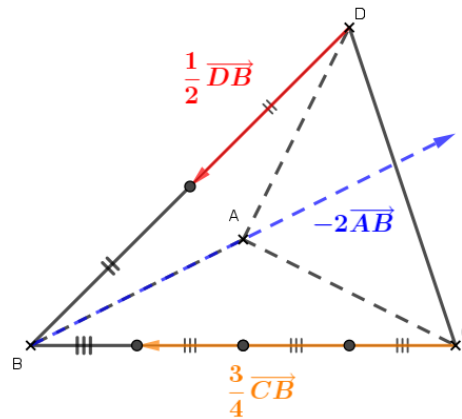
Définition : ► Soit k un réel non nul et \vec{v} un vecteur non nul.

On définit le vecteur $k\vec{v}$ comme le vecteur :

- de même direction que \vec{v} ;
- si $k > 0$: de même sens que \vec{v} et de norme égale à $k \times \|\vec{v}\|$;
- si $k < 0$, de sens opposé à \vec{v} et de norme égale à $-k \times \|\vec{v}\|$.

► Si $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors on définit $k\vec{v} = \vec{0}$.

Exemple :



c) Combinaisons linéaires de vecteurs :

Définition : On dit qu'un vecteur \vec{u} est une combinaison linéaire de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ si et seulement s'il existe n réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que :

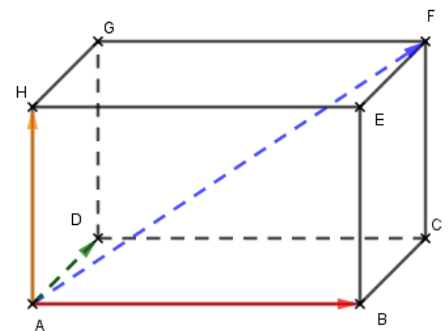
$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

Exemple : Dans ce pavé droit, le vecteur \vec{AF} peut s'écrire comme une combinaison linéaire des trois vecteurs \vec{AB} , \vec{AH} et \vec{AD} .

En effet :

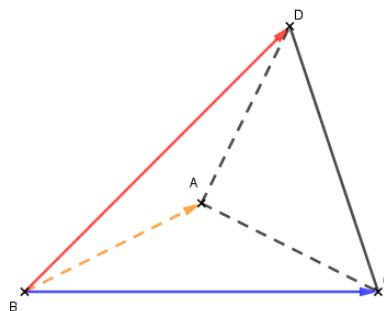
$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AH} + \vec{AD}$$

(ici tous les réels valent 1).



Définition : On dit que trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont linéairement indépendants s'il n'est pas possible d'exprimer l'un comme une combinaison linéaire des deux autres.

Exemple : Dans le tétraèdre ci-dessous :



Les vecteurs \vec{BA} , \vec{BC} et \vec{BD} sont linéairement indépendants.

Propriété (admise) : Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont linéairement indépendants si et seulement si $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

Exemple : dans l'exemple précédent, si on a trois réels a , b et c tels que :

$$a\vec{BA} + b\vec{BC} + c\vec{BD} = \vec{0}$$

alors :

$$a = b = c = 0$$

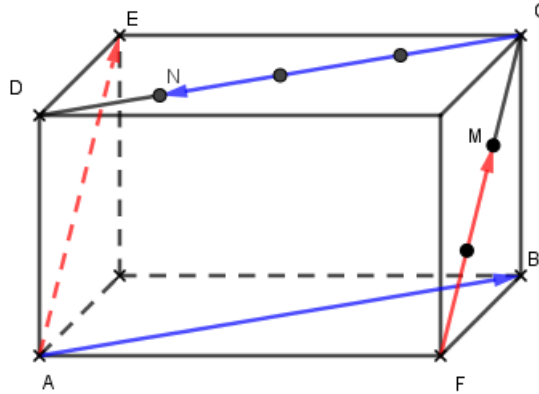
d) Colinéarité de vecteurs :

Définition : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} **non nuls** sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Ainsi, deux vecteurs **non nuls** sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Exemple :



Ici :

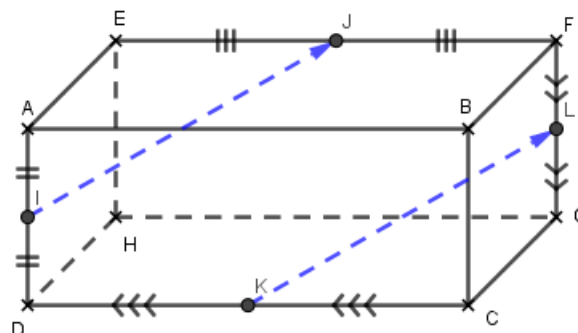
- $\vec{FM} = \frac{2}{3}\vec{AE}$, donc les vecteurs \vec{FM} et \vec{AE} sont colinéaires ;
- $\vec{GN} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$, donc les vecteurs \vec{GN} et \vec{AB} sont colinéaires.

Propriétés (admises) : Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

- Alignement de points : Les points A, B et C sont alignés si et seulement si \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.
- Parallélisme : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.
- Milieu : Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$.

Exemples d'utilisation :

► Soit le pavé droit ci-dessous :



Prouver que (IJ) et (KL) sont parallèles.

On a :

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AE} + \vec{EJ} \quad (\text{par la relation de Chasles})$$

et :

$$\vec{KL} = \vec{KC} + \vec{CG} + \vec{GL} \quad (\text{par la relation de Chasles})$$

Or, puisque ABCDEFGH est un pavé droit, on a :

$$\vec{IA} = \vec{GL} \quad , \quad \vec{AE} = \vec{CG} \quad \text{et} \quad \vec{EJ} = \vec{KC}$$

et donc :

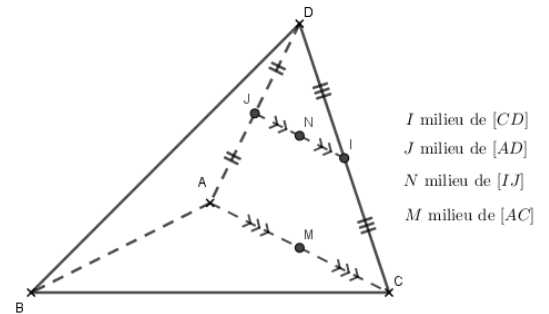
$$\begin{aligned} \vec{IJ} &= \vec{IA} + \vec{AE} + \vec{EJ} \\ &= \vec{GL} + \vec{CG} + \vec{KC} \\ &= \vec{KL} \end{aligned}$$

Finalement $\vec{IJ} = \vec{KL}$, les vecteurs \vec{IJ} et \vec{KL} sont colinéaires, donc les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

► Soit le tétraèdre ci-contre :

1) Montrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{CA}$.

2) En déduire que les points D, N et M sont alignés.



1) La relation de Chasles nous donne :

$$\vec{IJ} = \vec{ID} + \vec{DJ}$$

Or, J est le milieu de $[AD]$ et I est le milieu de $[CD]$, on a donc :

$$\vec{DJ} = \frac{1}{2} \vec{DA} \quad \text{et} \quad \vec{ID} = \frac{1}{2} \vec{CD}$$

soit, en remplaçant dans l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \vec{IJ} &= \vec{ID} + \vec{DJ} \\ &= \frac{1}{2} \vec{CD} + \frac{1}{2} \vec{DA} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{CD} + \vec{DA}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{CA} \quad (\text{relation de Chasles}) \end{aligned}$$

2) Pour prouver que D , N et M sont alignés, prouvons que \overrightarrow{DN} et \overrightarrow{DM} sont colinéaires :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} \\ &= 2\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{CM} \quad (E)\end{aligned}$$

Or :

- d'une part $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{IJ}$, d'après la question 1)
- d'autre part : $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IN}$

donc :

$$\boxed{\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{IN}}$$

En remplaçant dans l'égalité (E), on obtient alors :

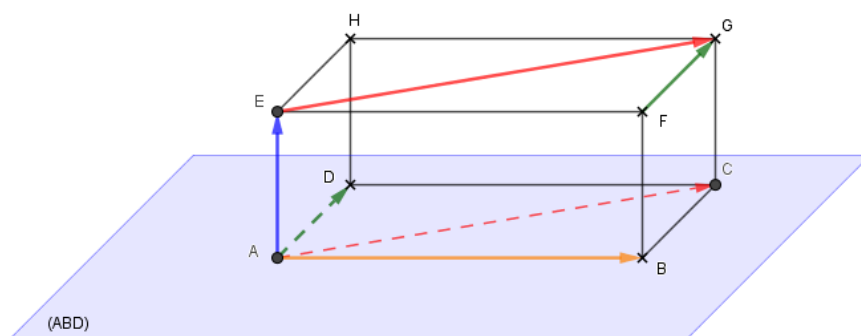
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} &= 2\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{CM} \\ &= 2\overrightarrow{DI} + 2\overrightarrow{IN} \\ &= 2(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IN}) \\ &= 2\overrightarrow{DN} \quad (\text{relation de Chasles})\end{aligned}$$

Finalement $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DN}$ et les vecteurs \overrightarrow{DM} et \overrightarrow{DN} sont colinéaires.
On en déduit que les points D , M et N sont alignés.

e) Vecteurs coplanaires :

Définition : On dit que des vecteurs sont coplanaires si et seulement s'il existe un plan contenant un point O tel que les représentants d'origine O de ces vecteurs aient leur extrémités dans ce plan.

Exemple : Dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH :

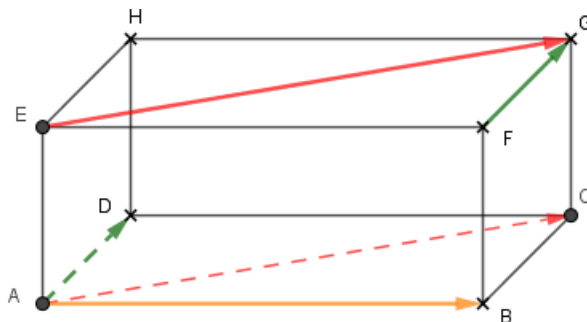


- Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{FG} sont coplanaires.
En effet, leurs représentants d'origine A (\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD}) ont tous leurs extrémités dans le plan (ABD).
- Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{AE} ne sont pas coplanaires, car le point E n'appartient pas au plan (ABD).

Propriétés (admisses) :

- Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement s'il existe trois réels a , b et c **non tous nuls** tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.
- Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires si et seulement l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

Exemple : Dans l'exemple précédent :



On a :

$$\begin{aligned}\vec{EG} &= \vec{AC} && \text{car ACGE est un parallélogramme} \\ &= \vec{AB} + \vec{AD} && \text{car ABCD est un parallélogramme} \\ &= \vec{AB} + \vec{FG} && \text{car ADGF est un parallélogramme}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\vec{EG} - \vec{AB} - \vec{FG} = \vec{0}$$

et les vecteurs \vec{AB} , \vec{EG} et \vec{FG} sont coplanaires.

Propriété (admise) : Soient trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} non nuls, **tels que \vec{v} et \vec{w} soient non colinéaires**, alors \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

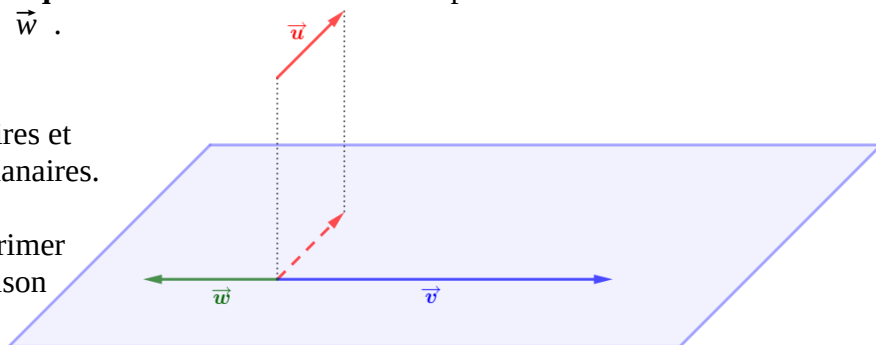
Pourquoi a-t-on besoin de la non colinéarité de deux vecteurs pour cette équivalence ?

- S'il existe deux réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$, alors $\vec{u} - a\vec{v} - b\vec{w} = \vec{0}$ où 1 , $-a$ et $-b$ sont non tous nuls, donc les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.
Ainsi le sens réciproque est toujours vrai.
- Cependant, si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires et que \vec{v} et \vec{w} sont colinéaires, alors **il n'existe pas forcément de réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$** : il suffit de prendre un vecteur de direction différente à celle de \vec{v} et \vec{w} .

Exemple :

Les vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont colinéaires et les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

Cependant, il est impossible d'exprimer le vecteur \vec{u} comme une combinaison linéaire des vecteurs \vec{v} et \vec{w} .



2) Droites et plans de l'espace:

Comme la géométrie du plan, la géométrie de l'espace repose sur un certain nombre d'axiomes, dont on précise ici quelques uns :

► Axiomes d'incidence :

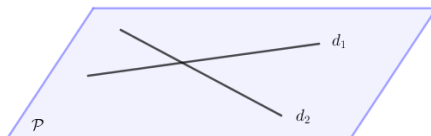
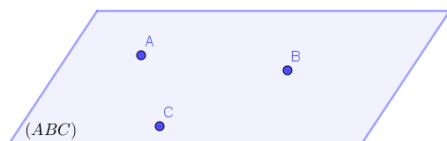
- Par deux points distincts A et B de l'espace passe une unique droite, souvent notée (AB)
- Par trois points non alignés A , B et C de l'espace passe un unique plan, souvent noté (ABC)
- Si deux points A et B de l'espace appartiennent à un plan \mathcal{P} , alors tous les points de la droite (AB) appartiennent à \mathcal{P} .

Ainsi, un plan peut être déterminé par une des conditions suivantes :

Trois points non alignés

Deux droites non confondues

Une droite et un point extérieur à cette droite



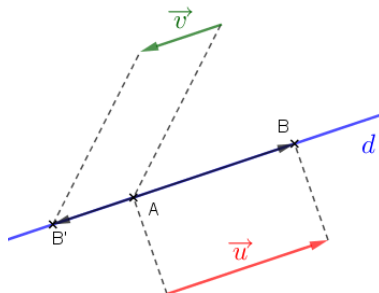
On admet également que les résultats obtenus en géométrie du plan restent applicables dans tout plan de l'espace (en particulier les théorèmes de Pythagore et Thalès).

a) Caractérisation vectorielle d'une droite :

Définition : On dit qu'un vecteur \vec{u} est un vecteur directeur d'une droite si et seulement s'il a la même direction que cette droite.

Autrement dit, \vec{u} est un vecteur directeur d'une droite si et seulement si il existe deux points A et B de cette droite tels que \vec{u} et \overrightarrow{AB} soient colinéaires.

Exemple :

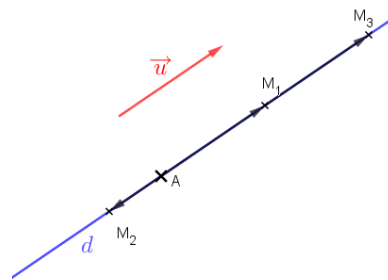


Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs directeurs de la droite d .

Propriété (admise) : Soit A un point de l'espace et \vec{u} un vecteur non nul, alors la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} est l'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires.

Autrement dit, c'est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple :



$$\overrightarrow{AM_1} = \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AM_2} = -\frac{1}{2}\vec{u}$$

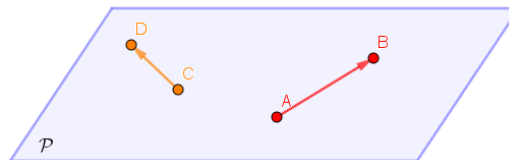
$$\overrightarrow{AM_3} = 2\vec{u}$$

La droite d est la droite passant par le point A et de vecteur directeur \vec{u} .

b) Caractérisation vectorielle d'un plan :

Définition : On appelle direction d'un plan \mathcal{P} l'ensemble des vecteurs \overrightarrow{AB} où A et B sont deux points de \mathcal{P} .

Exemple :



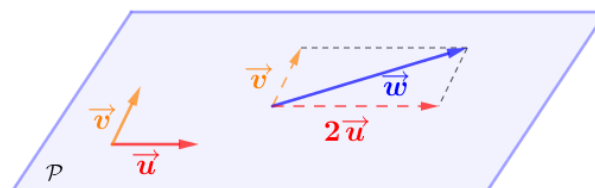
Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} appartiennent à la direction du plan \mathcal{P} .

Propriété (admise) : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de la direction de \mathcal{P} non colinéaires et non nuls engendrent cette direction.

Autrement dit, tout vecteur de la direction de \mathcal{P} est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

On dit alors que le couple $(\vec{u} ; \vec{v})$ est une base de \mathcal{P} .

Exemple :



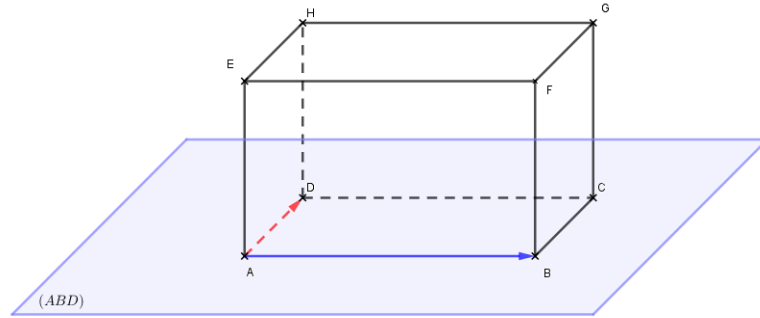
Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de la direction de \mathcal{P} sont non colinéaires et donc forment une base de \mathcal{P} . Tout vecteur de la direction de \mathcal{P} s'écrit donc comme une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .

En particulier, ici :

$$\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

Propriété (admise) : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires et non nuls et A un point de l'espace, alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec x et y deux réels est un plan passant par A .

On obtient une autre manière de déterminer un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires.



Dans ce pavé droit, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} ne sont pas colinéaires.
Le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} est le plan (ABD).

D'après la propriété, c'est l'ensemble des points M tels que :

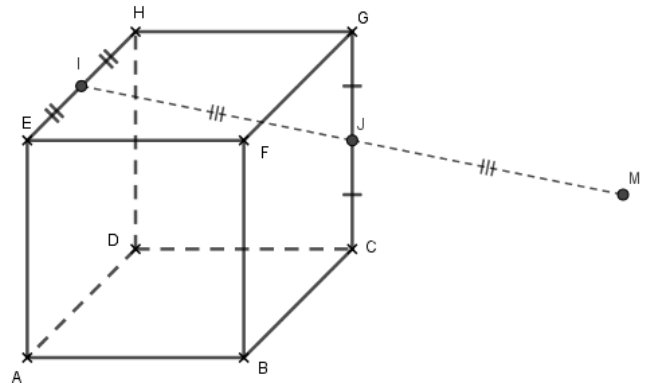
$$\vec{AM} = x \vec{AB} + y \vec{AD} \text{ avec } x \text{ et } y \text{ deux réels}$$

Application : Montrer qu'un point appartient à un plan

Soit $ABCDEFGH$ un cube, I le milieu de $[EH]$,
 J le milieu de $[CG]$ et M le symétrique de I par rapport à J .

Montrer que le point M appartient au plan (ABD).

Le polyèdre $ABCDEFGH$ étant un cube, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} ne sont pas colinéaires.
Une base de (ABD) est donc $(\vec{AB} ; \vec{AD})$.



Montrons que \vec{AM} peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de \vec{AB} et \vec{AD} .

On a :

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AI} + \vec{IM} \\ &= \vec{AE} + \vec{EI} + 2\vec{IJ} \\ &= \vec{AE} + \vec{EI} + 2(\vec{IH} + \vec{HG} + \vec{GJ}) \\ &= \vec{AE} + \vec{EI} + 2\vec{IH} + 2\vec{HG} + 2\vec{GJ} \\ &= \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{EH} + 2\vec{HG} + 2\vec{GJ} && \text{car } I \text{ milieu de } [EH] \\ &= \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{EH} + 2\vec{HG} + \vec{GC} && \text{car } J \text{ milieu de } [GC] \\ &= \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{EH} + 2\vec{HG} - \vec{AE} && \text{car } AEGC \text{ est un parallélogramme} \\ &= \frac{3}{2}\vec{EH} + 2\vec{HG} \\ &= \frac{3}{2}\vec{AD} + 2\vec{AB} && \text{car } ADHE \text{ et } ABGH \text{ sont des parallélogrammes} \end{aligned}$$

On a donc $\vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AD} + 2\vec{AB}$ et donc le point M appartient au plan (ABD).

3) Positions relatives de droites et de plans :

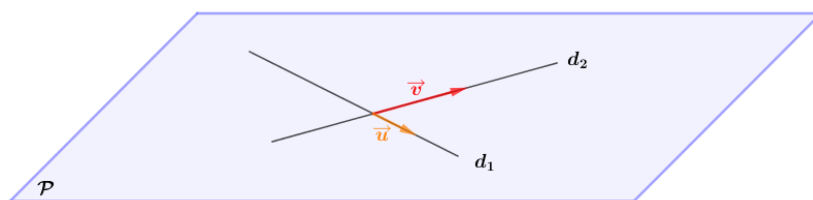
a) Positions relatives de deux droites dans l'espace :

Vocabulaire : On dit que deux droites de l'espace sont coplanaires si et seulement s'il existe un plan les contenant toutes les deux.

Propriété (admise) : Soit deux droites d_1 et d_2 de l'espace, de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} .

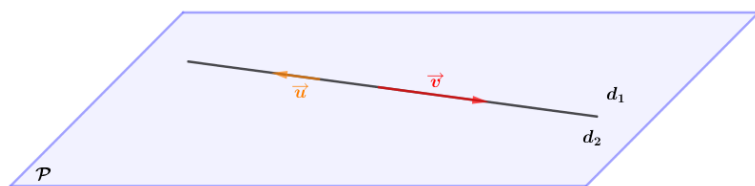
- Si d_1 et d_2 sont coplanaires, il existe trois configurations possibles :

► si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, alors les droites sont sécantes :

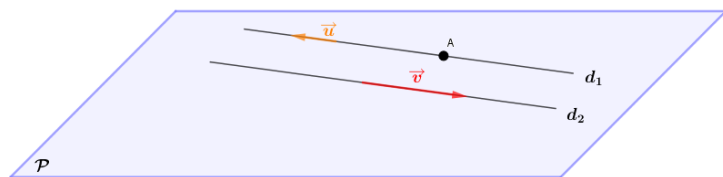


\vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, d_1 et d_2 sont sécantes

► si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors s'il existe un point appartenant à d_1 qui n'appartient pas à d_2 les droites sont strictement parallèles, sinon elles sont confondues.

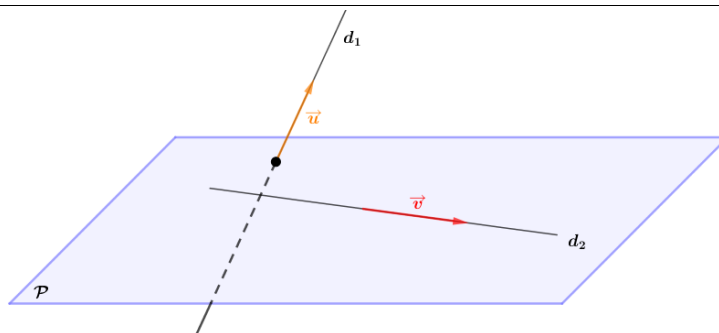


\vec{u} et \vec{v} colinéaires, droites confondues



\vec{u} et \vec{v} colinéaires, droites strictement parallèles (puisque $A \in d_1$ mais $A \notin d_2$)

- si elles sont non coplanaires, alors elles n'ont aucun point en commun.



d_1 et d_2 sont non coplanaires, elles n'ont donc aucun point d'intersection

Remarque : deux droites parallèles ou sécantes sont nécessairement coplanaires.

Ainsi, pour montrer que deux droites sont coplanaires il est parfois plus simple de montrer directement qu'elles sont parallèles ou sécantes sans utiliser les vecteurs.

b) Positions relatives de deux plans :

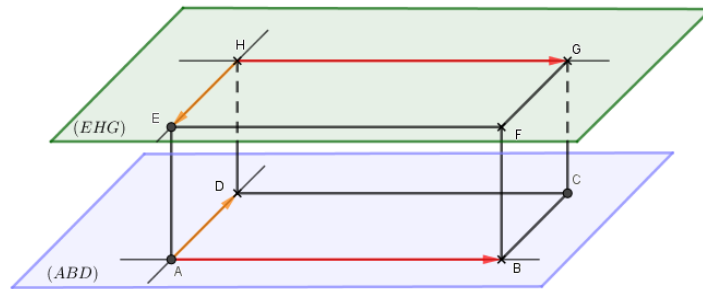
Définition : Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ont la même direction.

Propriété (admise) : Deux plans sont parallèles lorsque deux droites sécantes de l'un des plans sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre plan.

Autrement dit, deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles si et seulement si il existe deux bases (\vec{u}, \vec{v}) et (\vec{u}', \vec{v}') respectivement de \mathcal{P} et \mathcal{P}' telles que :

- \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires
 - \vec{v} et \vec{v}' sont colinéaires
- ou
- \vec{u} et \vec{v}' sont colinéaires
 - \vec{u}' et \vec{v} sont colinéaires

Exemple :



Dans le pavé droit ABCDEFGH, le plan (EHG) a pour base $(\vec{HE} ; \vec{HG})$ et le plan (ABD) a pour base $(\vec{AD} ; \vec{AB})$.

Or :

- \vec{EH} et \vec{AD} sont colinéaires ;
- \vec{HG} et \vec{AB} sont colinéaires.

Donc, les droites sécantes (EH) et (HG) du plan (EHG) sont respectivement parallèles aux droites sécantes (AD) et (AB) du plan (ABD) et les deux plans sont alors parallèles.

Remarque : deux plans parallèles sont soit confondus, soit ne possèdent aucun point commun.

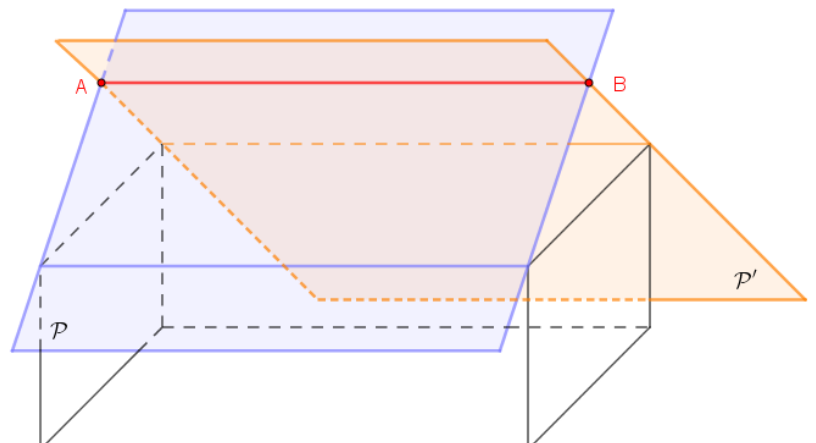
Propriété (admise) : Pour tout point de l'espace A et tout plan \mathcal{P} , il existe un unique plan parallèle à \mathcal{P} et passant par A .

Définition : Lorsque deux plans ne sont pas parallèles, on dit qu'ils sont sécants.

Propriété (admise) : Deux plans sécants s'intersectent selon une droite.

Exemple :

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' s'intersectent selon la droite (AB).



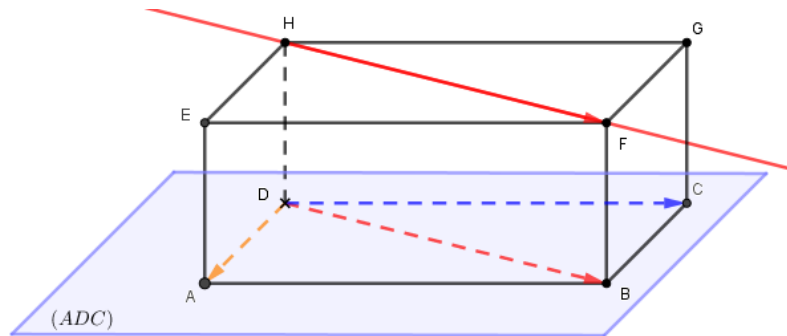
c) Positions relatives d'une droite et d'un plan :

Soit d une droite de vecteur directeur \vec{u} et \mathcal{P} un plan de base (\vec{v}, \vec{w}) .

Propriété (admise) : La droite d est parallèle au plan \mathcal{P} si et seulement si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

Dans ce cas, soit d est incluse dans \mathcal{P} , soit elle ne possède aucun point commun avec \mathcal{P} .

Exemple : Dans le pavé droit ABCDEFGH, montrons que (HF) est parallèle à (ADC) .



Le vecteur \vec{HF} est un vecteur directeur de (HF) et $(\vec{DA}; \vec{DC})$ est une base de (ADC) .

On a :

$$\begin{aligned}\vec{HF} &= \vec{DB} && \text{HFBD est un parallélogramme} \\ &= \vec{DA} + \vec{DC} && \text{ADCB est un parallélogramme}\end{aligned}$$

et donc :

$$\vec{HF} - \vec{DA} - \vec{DC} = \vec{0}$$

Les vecteurs \vec{HF} , \vec{DA} et \vec{DC} sont donc coplanaires et la droite (HF) est parallèle au plan (ADC) . Puisque (HF) n'est pas incluse dans le plan (ADC) (le point H n'appartient pas à (ADC)), alors (HF) et (ADC) ne possèdent aucun point commun.

Propriété (admise) : Une droite d est parallèle à un plan \mathcal{P} si et seulement s'il existe une droite d' incluse dans \mathcal{P} parallèle à d .

Exemple : Dans l'exemple précédente, la droite (BD) est incluse dans le plan (ADC) et est parallèle à la droite (HF) .

Propriété (admise) : La droite d est sécante avec le plan \mathcal{P} si et seulement si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont linéairement indépendants. Dans ce cas, leur intersection est réduite à un point.

Exemple :

Dans le pavé droit ABCDEFGH, \vec{AE} est un vecteur directeur de la droite (AE) et $(\vec{AB}; \vec{AD})$ est une base du plan (ADC) .

On a vu que les vecteurs \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AE} sont linéairement indépendants, donc la droite (AE) et le plan (ADC) sont sécants. Puisque $A \in (AE)$ et $A \in (ADC)$, alors ils s'intersectent en A .

